コーシーの積分定理

70053169 環境情報学部 2 年　久野友也

平成 15 年 12 月 6 日

1　解説

コーシーの積分定理とは、

コーシー・リーマンの偏微分方程式
　領域 D 内で f(z) が微分可能であること同値の関係式

グリーンの定理
　単一閉曲線上の積分とその内部の面積分との変換式

という 2 つの定理、公式を用いて導かれた
「開区間領域 D 内で f(z) が正則であるとき、D 内の任意の閉積分回路 C に沿う f(z) の周回積分は零になる」
という、線積分の重要な定理である。
このことを実関数と比較して考える。f(z) を x 軸に投影したとすると、C 上の周回積分は x 軸の往復という、実関数の積分と考えられる。このとき、積分範囲の全ての点で微分可能ならば、実関数の往復積分は 0 になる。従ってこの公式は実関数の往復積分を複素平面に拡張した定理とも考えられる。
この定理を応用すると、

道の変形の原理
　正則領域の線積分値は、経路によらず一定

コーシーの積分公式、留数定理
　閉曲線の内部に特異点が存在するときの閉曲線の積分

モレラの定理
　f(z) の領域 D 内の任意の周回積分値が常に 0 ならば f(z) は D 内で正則

最大値原理等
　f(z) の正則領域 D の内部での—f(z)—の最大値は D の境界上にある。逆に D の内部で—f(z)—が最大値を取るならば f(z) は定数である。

等という定理、原理が導かれる。これらは複素関数で重要なだけでなく、さらにグリーンの定理やそれの曲面上へ拡張したストークスの定理、ラプラスの方程式などと共に電磁気学へ応用すると、ポアソンの積分方程式、循環、マクスウェルの方程式などといった電磁気の最も基本となる考え、式の根幹を成している。

2　証明

証明法は複数ある。今回はグリーンの定理を使う方法と使わない方法で証明し、最後にグルサの証明の考え方について考える。

D を開区間領域とする。f(z) は D 内で正則であるとする。C を単一閉曲線で C ⊂ D とする。このとき $\int_C f(z)dz = 0$ を証明する。

以下 $i^2 = -1$、z $\in C$、$x, y \in R$、$z = x + iy$、$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく。

2.1　コーシー・リーマンの偏微分方程式の必要性の証明

コーシー・リーマンの関係式はどちらの証明でも使うので、正則ならば偏微分方程式を満たすという必要性のみ先に証明する。
D 内で正則な関数 f(z) は微分可能なので
$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{z+\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{(x+iy)+(\Delta x+i\Delta y)}$
が、極限値を持つ。そのためには少なくとも x 軸、y 軸それぞれに沿った場合の極限値は等しくならなくてはいけない。よって
1.y=0 のとき
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{x+\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x)+iv(x+\Delta x))-(u(x)+iv(x))}{x+\Delta x}$
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{x+\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{x+\Delta x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$
2.x=0 のとき
$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{i(y+\Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} -i\frac{(u(y+\Delta y)+iv(y+\Delta y))-(u(y)+iv(y))}{y+\Delta y}$
$= \lim_{\Delta y \to 0} -i\frac{u(y+\Delta y)-u(y)}{y+\Delta y} + \frac{v(y+\Delta y)-v(y)}{y+\Delta y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$
x,y は実数で u(x,y)、v(x,y) は実数関数なので、
$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

2.2　グリーンの定理を使わない証明

f(z) は D 内で正則なので、u(x,y)、v(x,y) は偏微分関数を持つ。
$\frac{dz}{dz} = \frac{dx}{dz} + i\frac{dy}{dz}$
$dz = dx + idy$
よって
$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy)$
$= \int_C (u(x,y)dx + iu(x,y)dy + iv(x,y)dx - v(x,y)dy)$
$= \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_C (u(x,y)dy + v(x,y)dx)$
また f(z) は D 内で正則なのでコーシー・リーマンの偏微分方程式を満たす。よって
$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$
これは偏微分可能性だけでなく、全微分可能を意味する。よって全微分性より
$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy, dv(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}dy$
$\Leftrightarrow du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dy, dv(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy$
これは、x で偏微分する前の形 $u(x,y)x - v(x,y)y, v(x,y)x + u(x,y)$ なるものが存在することを意味するので、$dP(x,y) = u(x,y)dx - v(x,y)dy, dQ(x,y) = v(x,y)dx + u(x,y)dy$ を満たす P(x,y)、Q(x,y) が存在する。

従って $\int_C f(z)dz = \int_C dP(x,y) + i\int_C dQ(x,y)$
始点の座標を (x,y)=(a,b) とすると、C は閉曲線なので終点の座標も (x,y)=(a,b)
$\therefore \int_C dP(x,y) + i\int_C dQ(x,y) = (P(a,b) - P(a,b)) + (Q(a,b) - Q(a,b)) = 0$
$\therefore \int_C f(z)dz = 0$

2.3　グリーンの定理を使う証明

上記同様、f(z) は D 内で正則なので、
$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_C (u(x,y)dy + v(x,y)dx)$
グリーンの定理より
$\int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) = -\int\int_S (\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x})dxdy$
$\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy) = \int\int_S (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y})dxdy$
(S は C 内の領域) と書ける。
コーシー・リーマンの偏微分方程式より
$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$
$\therefore \int_C f(z)dz = 0$

2.4　グルサの証明

閉曲線 C を多角形で近似する。3 角形は多角形の構成要素であるから、近似した多角形は 3 角形の集まりと見なせる。全ての 3 角形を C の積分と同じ向きに積分すると、新しく形成された線分は全て 2 つの向きに積分されるので、打ち消し合う。

従って $\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)dz$ と書ける。

できた 3 角形をさらに分割していくと、それら全ての図形に含まれる点 z_0 が存在する。このことと、点 z_0 での微分可能性を用いると、分割していった 3 角形の積分の絶対値は 0 になる。その結果、全ての 3 角形の積分値が 0 になるため、求める積分値が 0 になるという証明。

この結果 f(z) の微分性のみでコーシーの定理が証明できるので、導関数も微分可能という条件は必要ないことになる。

3　感想

私が現代数学の講義で最も感銘と疑問を覚えたのがこのコーシーの積分定理であった。複雑な定義が必要な複素数の積分で、計算結果が 0 というのはどうも納得ができなかった。しかし、調べた結果、この定理は様々な個所で使われ、現在の科学の発展になくてはならない考えであることが分かった。今後はこの複素関数を利用して電磁気学にも挑戦してみたい。

参考文献

[1] 梅沢敏夫 , 「やさしい複素解析」, 倍風館

[2] 松浦武信 他 , 「現代工学のための複素関数の微分と積分」 , 現代工学社

[3] 高木貞治 , 「解析概論」 , 岩波書店